III этап Всеукраинской ученической олимпиады по физике 2016/2017 учебного года Харьковская область

10 класс

Решения задач

Задача 4. Металлы

У барона Танты снова неприятности. У него есть растворы перхлората меди и нитрата серебра, и ему срочно необходимо выделить соответствующие металлы. Для этого он последовательно подключает две электролитические ванны. Каково отношение масс металлов, выделившихся на электродах? Электрохимический эквивалент меди $k_1 = 2,37$ *г/А · ч*, а серебра $k_2 = 4,02$ *г/А · ч*.

Решение

Согласно закону электролиза Фарадея

$$m = kIt$$

где m - масса осаждённого на электроде вещества, I ток, протекающий через электролитическую ванна, t время действия постоянного тока. Мы можем записать отношение масс веществ, выделившихся в двух ваннах.

$$\frac{m_1}{m_2} = \frac{k_1 I_1 t_1}{k_2 I_2 t_2}.$$

так как ванны подсоеденины последовательно, то через них протекает одинаковый ток, за одинаковое время

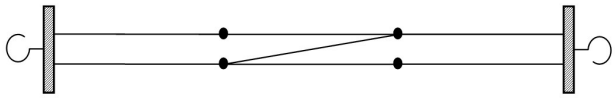
$$I_1 = I_2 \qquad \text{и} \qquad t_1 = t_2$$

откуда имеем ответ

$$\frac{m_1}{m_2} = \frac{k_1}{k_2}.$$

Задача 1. Резинки

В заточении в Весёлой башне доктор Безар развлекает себя тем, что мастерит разные системы из резинок. У него есть резинка, которую он разрезает на семь равных частей жесткости k и соединяет так, как показано на рисунке. Чему равна жёсткость системы?



Решение

Рассмотрим сначало систему состоящую из двух одинаковых, последовательно соединённых пружин. Из условия равновесия узла соединения пружин, и геометрии задачи

$$F_1 = k\triangle x_1 = k\triangle x_2 = F_2$$
$$\triangle x_1 = \triangle x_2 = \frac{\triangle x}{2}$$

Из условия равновесия точки приложения силы

$$F_1 = k\triangle x_1 = k'\triangle x = F$$
$$k' = \frac{k}{2}$$

Имеем жесткость двух последовательно соединённых пружин.

Запишем условые равновесия узла соединения системы заданной в условии

$$F_1 + F_2 = \frac{k}{2}\triangle x_1 + k\triangle x_2 = k\triangle x_3 = F_3$$
$$\triangle x_1 + 2\triangle x_2 = 2\triangle x_3 \tag{1}$$

Из геометрии задачи

$$\triangle x_1 + \triangle x_3 = \triangle x \tag{2}$$
$$\triangle x_2 + \triangle x_3 = \triangle x_1 \tag{3}$$

Из условия равновесия точки приложения силы

$$\frac{k}{2}\triangle x_1 + k\triangle x_3 = k''\triangle x \tag{4}$$

Получим связь между $\triangle x_1$ и $\triangle x_3$ используя уравнения (1) и (3)

$$\triangle x_1 = \frac{4}{3}\triangle x_3 \tag{5}$$

Подставляя (5) в (2) получим

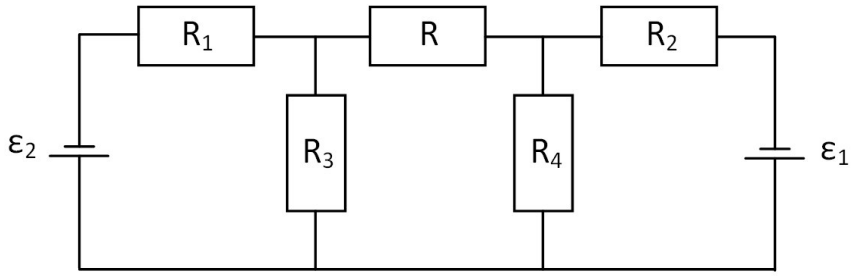
$$\triangle x_3 = \frac{3}{7}\triangle x \tag{6}$$

И используя (4) (5) и (6) находим ответ задачи

$$\frac{5}{3}k\triangle x_3 = k''\triangle x$$
$$\frac{5}{7}k = k''$$

Задача 3. Сопротивление бесполезно

Во время отсутствия дона любознательный Едэн собирает электрические цепи. Какой ток течёт через сопротивление R, если $R_1 = R_4 = 2Ом$, $R_3 = R = 1Ом$, $R_2 = 4Ом$, $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = 6B$?



Решение

Для решения задачи, выберем произвольно направления протекания токов и воспользуемся законами Кирхгофа.

$$\begin{cases} I_4 = I + I_2 & (1) \\ I_1 = I + I_3 & (2) \\ I_3 = I + 2I_4 & (3) \\ 6 = 4I_2 + 2I_4 & (4) \\ 6 = 2I_1 + I_3 & (5) \end{cases}$$

Избавляемся от переменной I_1, подставляя (2)$\rightarrow$ (5)

$$\begin{cases} I_4 = I + I_2 & (1) \\ I_3 = I + 2I_4 & (3) \\ 6 = 4I_2 + 2I_4 & (4) \\ 6 = 2I + 3I_3 & (6) \end{cases}$$

Избавляемся от переменной I_4, подставляя (1)$\rightarrow$ (3)(4)

$$\begin{cases} I_3 = 3I + 2I_2 & (7) \\ 6 = 6I_2 + 2I & (8) \\ 6 = 2I + 3I_3 & (6) \end{cases}$$

Избавляемся от переменной I_3, подставляя (7)$\rightarrow$ (6)

$$\begin{cases} 6 = 6I_2 + 2I & (8) \\ 6 = 6I_2 + 11I & (9) \end{cases}$$

Из чего очевидно, что $I = 0$

Задача 2. #Ньютон

Алексею Мордуховичу в Институт поступает срочное сообщение. На своём стратолёте он отправляется контролировать исследования в пустыню N. В какой-то момент, когда стратолёт летит горизонтально с ускорением g, Алексею Мордуховичу, нервничая, роняет яблоко с высоты h_0 над полом стратолёта. Когда яблоко достигает высоты $h = h_0/2$, автопилот резко меняет направление ускорения стратолёта на угол β к горизонту. На каком расстоянии от ног Алексея Мордуховича упадёт яблоко, если оно начинает своё падение без начальной скорости?

Решение

Для решения задачи рассмотрим движение яблока в неинерциальной системе отсчёта, в которой стратолёт неподвижен. Введём оси так, что ось x направлена параллельно полу корабля, а y - перпендикулярно Нас интересует изменение координаты x яблока. Разобъём решение задачи на две части: до изменения направления ускорения и после. Запишем уравнения движения яблока в координатном виде. Сначала для движения до изменения ускорения (для $t < t_1$)

$$x(t) = -\frac{gt^2}{2}$$

$$y(t) = h - \frac{gt^2}{2}$$

Ускорения получаются очевидным образом из рассморения сил действующих на яблоко. Найдем через какое время t_1 стратолёт поменяет направление своего ускорения

$$y(t_1) = \frac{h}{2} = h - \frac{gt_1^2}{2}$$

$$\frac{gt_1^2}{2} - \frac{h}{2} = 0$$

$$t_1 = \sqrt{\frac{h}{g}}$$

Перемещение по кординате x на первом этапе движения равно

$$S_1 = x(t_1) = \frac{gt_1^2}{2} = \frac{h}{2}$$

Найдем скорост яблока в момент времени t_1

$$V_x(t_1) = -gt_1 = -\sqrt{gh} = V_{x_1}$$

$$V_y(t_1) = -gt_1 = -\sqrt{gh} = V_{y_1}$$

и запишем уравнения движения для изменённого ускорения (для $t > t_1$)

$$x(t) = x(t_1) + V_{x_1}(t - t_1) - \frac{g\cos\beta(t - t_1)^2}{2}$$

$$y(t) = y(t_1) + V_{y_1}(t - t_1) - \frac{g(1 + \sin\beta)(t - t_1)^2}{2}$$

что упрощённо выглядит так

$$x(t) = -\frac{h}{2} - \sqrt{gh}(t - t_1) - \frac{g\cos\beta(t - t_1)^2}{2}$$

$$y(t) = \frac{h}{2} - \sqrt{gh}(t - t_1) - \frac{g(1 + \sin\beta)(t - t_1)^2}{2}$$

Найдём время за которое яблоко упадёт на пол

$$t_{\text{общ}} = t_1 + t_2$$

$$y(t_{\text{общ}}) = 0 = \frac{h}{2} - \sqrt{gh}t_2 - \frac{g(1 + a\sin\beta)t^2}{2}$$

$$\frac{g(1 + a\sin\beta)t_2^2}{2} + \sqrt{gh}t_2 - \frac{h}{2} = 0$$

$$t_2 = \frac{-\sqrt{gh} \pm \sqrt{gh + gh(1 + \sin\beta)}}{g(1 + a\sin\beta)}$$

$$t_2 = \sqrt{\frac{h}{g}} \cdot \frac{-1 + \sqrt{2 + \sin\beta}}{1 + \sin\beta}$$

Тогда ответ будет задачи, это

$$x(t_{\text{общ}}) = x(t_1) + V_{x_1}t_2 - \frac{g\cos\beta t_2^2}{2}$$

$$x(t_{\text{общ}}) = -\frac{h}{2} - h \cdot \frac{-1 + \sqrt{2 + \sin\beta}}{1 + \sin\beta} - \frac{h\cos\beta \cdot (\frac{-1+\sqrt{2+\sin\beta}}{1+\sin\beta})^2}{2}$$

Задача 5. Обруч

5. Дона Астер пригласили в приезжий цирк. Больше всего ему понравился номер с гимнасткой и обручем. По дороге домой он поставил мысленный эксперимент: гимнастка кидает обруч, закрученный в обратную сторону так, что он проскальзывает. Найдите 1) условия, при которых обруч вернётся; 2) время, за которое он вернётся. Известно, что сила трения вызывает угловое ускорение обруча $\varepsilon = g\mu/r$, где r – радиус обруча, μ – коэффициент трения скольжения обруча о поверхность. Начальная скорость поступательного движения обруча V_0, начальная угловая скорость обруча ω_0. Считать, что обруч не может завалиться на бок.

Решение

Колесо прокатится назад, если обруч не поменяет направления своего вращения до того момента, как он поменяет направление своего поступательного движения под действием силы трения. Ускорение, вызванное силой трения скольжения, направлено против направления движения тела и легко находится из второго закона ньютона.

$$F = ma = mg\mu, \quad \text{следовательно} \quad a = g\mu$$

Найдем время до остановки обруча t_1

$$V(t) = V_0 - g\mu t \qquad V(t_1) = V_0 - g\mu t_1 = 0$$

$$t_1 = V_0/g\mu$$

и время до изменетя направления вращения обруча t_2, под действием постоянного момента силы трения (есил обруч проскальзывает всегда)

$$\omega(t) = \omega_0 - \varepsilon t = \omega_0 - \frac{g\mu}{r}t$$

$$\omega(t_2) = \omega_0 - \frac{g\mu}{r}t_2 = 0$$

$$t_2 = \frac{\omega_0 r}{g\mu}$$

Запишем ответ на первый вопрос задачи, исходя из того, что должно выполняться неравенство $t_1 < t_2$

$$\frac{V_0}{g\mu} < \frac{\omega_0 r}{g\mu} \quad \rightarrow \quad V_0 < \omega_0 r$$

Ответ на второй вопрос задачи зависит от того, будет ли обруч проскальзывать вплоть до возвращения или нет. Найдем момент времени t_3, в который обруч перестанет проскальзывать.

$$\omega(t_3)r = -V(t_3)$$

$$(\omega_0 - \frac{g\mu}{r}t_3)r = -V_0 + g\mu t_3$$

$$t_3 = \frac{\omega_0 r + V_0}{2g\mu}$$

Найдём время, за которе вернётся обруч t_4, предпологая, что он проскальзывает на всём пути. В этом случае обруч будет испытывать постоянное ускорение $a = g\mu$.

$$x(t_4) = V_0 t_4 - \frac{at_4^2}{2} = 0 \quad \rightarrow \quad t_4 = \frac{2V_0}{g\mu}$$

В случае, если $t_3 \geq t_4$, обруч вернётся за время t_4.

$$t_3 \geq t_4 \quad \Leftrightarrow \quad \omega_0 r \geq 3V_0$$

Если же $t_3 \leq t_4$, после момента времени t_3 обруч будет продолжать движение с постоянной скоростью. Тогда,

$$t_{\text{общ}} = t_3 + t_5,$$

$$t_5 = \frac{x(t_3)}{|V(t_3)|} = \frac{V_0 t_3 - \frac{g\mu t_3^2}{2}}{-V_0 + g\mu t_3}$$

Подставляя получаем

$$t_{\text{общ}} = \frac{1}{2}\frac{\omega_0 r + V_0}{\omega_0 r - V_0}t_3 = \frac{1}{4g\mu}\frac{(\omega_0 r + V_0)^2}{\omega_0 r - V_0}$$