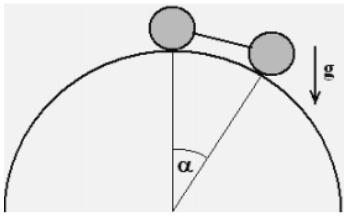
Решение задач 11 класса 2017.

1. Два одинаковых шарика массы m связаны натянутой нитью и расположены на сфере (см. рис.). Радиус, проведённый к точке касания с верхним шаром, вертикален, а проведённый к точке касания с нижним, образует угол α с вертикалью. Найдите ускорения шаров и натяжение нити сразу после того, как отпустили верхний шар. Трения нет, ускорение свободного падения g.



Решение.

Поскольку начальная скорость нулевая, то центростремительное (нормальное) ускорение равно нулю. Нить направлена по прямой,которая соединяет центры шаров и поэтому образует угол α/2 с горизонтом.

Тогда 2-й закон Ньютона для верхнего шарика в проекции на горизонтальную ось будет

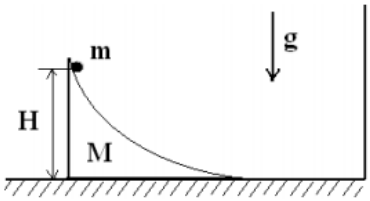
$$T\cos(\alpha/2) = ma$$

Для нижнего шарика 2-й закон Ньютона в проекции на ось параллельную к касательной будет

$$m\,g\,\sin(\alpha) - T\cos(\alpha/2) = ma$$

Отсюда ускорениеa= (g/2)sinα, а натяжение$T = mg\sin(\alpha/2)$.

2. Похила грань клина маси M плавно переходить в горизонталь. На висоті H помістили невелике тіло маси m (m<M). Тіло і клин відпускають. Зісковзнувши з клина, тіло пружно відбивається від вертикальної стінки і піднімається по клину. Наскільки максимальна висота підйому буде менше початкової висоти H? Тертя немає.



Розв'язання

Віднормуємо потенціальну енергію так, що вона дорівнює нулю, коли тіло перебуває на горизонтальній поверхні. Тоді початкова потенціальна енергія системи $E_n = mgH$. Після зісковзування іимпульси клина та тіла є протилежними та однаковими за модулем (внаслідок відсутності тертя система є замкненою вздовж горизонталі, отже горизонтальна складова імпульсу системи зберігається). Тоді, внаслідок закону збереження повної механічної енергії та записавши кінетичну енергію через імпульс, маємо

$$\frac{p^2}{2m} + \frac{p^2}{2M} = mgH\,. \qquad (1)$$

Після відбиття тіла від стінки імпульс тіла не змінює величину, але змінює напрямок. Повний імпульс системи становитиме $2p$. На максимальній висоті підйому швидкості тіла та клина є однаковими, їхня спільна кінетична енергія $\frac{(2p)^2}{2(m+M)}$. Позначимо висоту, на яку піднімається тіло по клину як h. Запишемо закон збереження повної енергії

$$\frac{(2p)^2}{2(m+M)} + mgh = mgH$$

. (2)

Виключивши імпульс з рівнянь (1)-(2), знайдемо

$$\Delta h = H - h = \frac{4mMH}{(m+M)^2}. \quad (3)$$

Обговоримо здобутий результат (3).

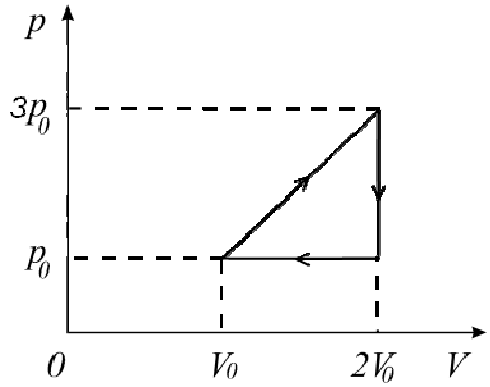
1) Цей результат є правильним за розмірністю. Маса міститься в чисельнику множником у квадраті, так само – в знаменнику.

2) Якщо клин є дуже важким, то він при всіх рухах тіла лишається нерухомим. Відбившись від стінки, тіло піднімається на ту саму висоту, з якої зісковзнуло. При цьому формула (3) дає 0, що відповідає дійсності.

3) Якщо клин є дуже легким, то тіло впаде вниз майже вертикально, рухаючись праворуч дуже повільно, натомість клин швидко поїде ліворуч. Після відбиття від стінки тіло почне повільно рухатись ліворуч, але ніколи не наздожене клин і, відповідно, не підніметься на ньому ні на яку висоту. Формула (3) для нульової маси клина дає хибний результат. Отже, здобутий результат (3) є застосовним, лише якщо маса клина є не надто малою: тіло після відбиття повинно мати більшу швидкість, ніж клин, аби тіло могло наздогнати клин: $M>m$ (це ф є умова застосовності формули (3)).

У граничному випадку, $M=m$, формула (3) дає вірний результат: $\Delta h=H$. Тобто, висота, на яку підніметься тіло, якщо його маса лише трохи менша за масу клина, є нехтовно малою порівняно з висотою клина H.

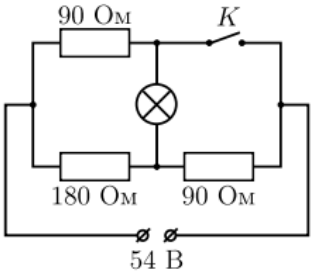
3. С некоторым объемом идеального газа осуществляется цикл, показанный на рисунке. Минимальная температура газа, достигаемая при выполнении цикла, равна T_{min}. Какой объем будет занимать газ, когда его температура при выполнении цикла станет равной $2T_{min}$?



Решение.

Очевидно, что минимальная температура достигается в точке (p_0, V_0). В соответствии с уравнениями состояния газа $p_0V_0 = \nu RT_{\min}$ и $pV = \nu R2T_{\min}$ получим: $pV = 2p_0V_0$. Подобных точек на графике две. Одна из них – этоточка (p_0, $2V_0$).Вторая лежит на наклонной прямой линии с уравнением $p = \frac{2p_0}{V_0}V - p_0$. Решая полученную систему уравнений $\begin{cases} pV = 2p_0V_0 \\ p = \frac{2p_0}{V_0}V - p_0 \end{cases}$ для искомого объёма, находим $V = \left(1+\sqrt{17}\right)\frac{V_0}{4}$.

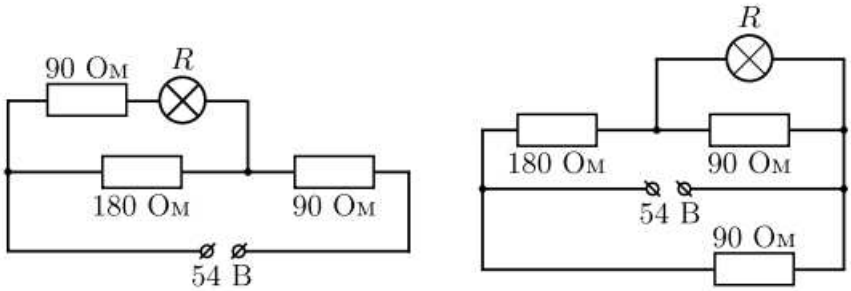
4. В собранной схеме лампочка горит одинаково ярко как при замкнутом, так и при разомкнутомключе K. Найдите напряжение на лампочке.



Решение.

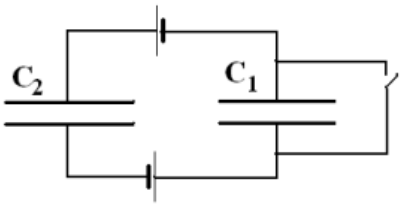
Обозначим сопротивление лампочки через R, а искомое напряжение на ней – через U. Исходную электрическую цепь с незамкнутым ключом можно изобразить в эквивалентном виде, показанном на рисунке слева. Тогда напряжение на участке цепи, содержащем параллельное соединение, равно $U_1 = U + 90\cdot(U/R)$, сила текущегочерез этот участок тока составляет $(U/R) + (U_1/180)$, и закон Ома дляданной схемы даёт:

$$U + 90 \cdot \frac{U}{R} + 90 \cdot \left(\frac{U}{R} + \frac{U + 90 \cdot (U/R)}{180}\right) = 54.$$



После замыкания ключа цепь можно перерисовать так, как показано на рисунке справа. Из него видно, что напряжение на верхнем участке цепи, содержащем два резистора и лампочку, составляет 54 В. ЗаконОма для этого участка цепи имеет вид: $U + 180\left(\frac{U}{R} + \frac{U}{90}\right) = 54$.Решая полученные уравнения, найдём, что сопротивление лампочки равно R = 30 Ом, а напряжение на ней U = 6 В.

5. Два незаряженных конденсатора с ёмкостями C_1 и C_2 соединили с одинаковыми батареям, как показано на схеме. После установления равновесия заряд второго конденсатора оказался равным q_o. Каким станет его заряд q после замыкания ключа?



Решение.

Из сохранения суммарного заряда верхних (или нижних пластин) следует,что до замыкания заряды конденсаторов одинаковы. Поскольку сумма напряжений наконденсаторах

равна сумме напряжений на батареях, то $q_0\left(\frac{1}{C_1}+\frac{1}{C_2}\right)=2U$. После же замыкания ключа получим $\frac{q}{C_2}=2U$. Отсюда $q=q_0\left(\frac{C_2}{C_1}+1\right)$.