III этап Всеукраинской ученической олимпиады по физике 2016/2017 учебного года Харьковская область

9 класс

Решения задач

Задача 1. Ведьмы на блоках

1. Собравшись для обсуждения планов на ближайшее столетие, Агна, Берта, Джил и Джин расположились в равновесии на системе нитей и блоков как показано на рисунке. Сколько весят Агна (A) и Берта (B), если двойняшки (J) весят по 40 кг, а массой блоков и нитей и трением можно пренебречь? Темные блоки закреплены и неподвижны, светлые подвижны.

Решение

Так как все девушки находятся в равновесии, а массой блоков и тернием можно пренебречь, то сила натяжения нити во всех точках одна и та же. Поэтому двое близняшек весят вдвоем столько, сколько держат две нити, а значит сила натяжения одной нити равна $T = mg$, где $m = 40$ кг, масса одной из них. Соответственно Агну поддерживают две нити, действующие с силой $2T$, и она весит 80 кг. Берта выглядит довольно стройной, но тем не менее из рисунка видно, что ее поддерживают целых четыре нити, а значит она весит $4m = 160$ кг. Внешность может быть обманчива.

Задача 2. Кольцо и бусы

Как-то раз Агна обзавелась волшебным кольцом и набором одинаковых бусинок, которые отталкиваются друг друга и от кольца. В ходе некоторых экспериментов было замечено, что если телепортировать бусинку почти точно в центр кольца, она улетает вдаль с заметной скоростью. Электрический заряд кольца Q, его радиус R, заряды бусинок q, а их массы m. Чему равна скорость бусинки вдали, если силой тяжести и другими несущественными эффектами можно пренебречь?

Решение

Каждый маленький кусочек кольца находится на одинаковом расстоянии R от центра кольца, поэтому они все создают потенциал электростатического поля в центре, равный

$$\varphi = k_e \frac{Q}{R}.$$

Приравнивая потенциальную энергию бусинки в центре к ее кинетической энергии на бесконечности, получим

$$\frac{mv^2}{2} = \frac{k_e q Q}{R},$$

откуда имеем ответ

$$v = \sqrt{\frac{2}{m}\frac{k_e Q q}{R}}.$$

Нужно заметить, что для того, чтобы силой тяжести и правда можно было пренебречь, заряды должны быть очень большими, такими, что в нормальных условиях это очень сложно реализовать.

Задача 3. Восьмерка

Чтобы спасти одного симпатичного, но неосмотрительного принца из темницы, Берте нужно открыть дверь в подземелье. После некоторой предварительной работы видимая часть провода питания электронного замка стала иметь форму восьмерки, с двумя петлями в форме окружностей разного размера. Провод хорошо изолирован, перекусить его нечем, а закоротить напрямую невозможно, но в одном месте изоляцию кто-то погрыз. Известно, что полная длина восьмерки L, напряжение на ней U, а напряжение пробоя изоляции в месте погрыза W. Насколько большого радиуса нужно сделать дальнюю от источника напряжения петлю, чтобы организовать пробой в точке контакта на месте погрыза?

Решение

Пусть радиус ближнего к источнику напряжения кольца r_1, дальнего r_2. Полная длина петли равна $L = 2\pi(r_1 + r_2)$. Сопротивление каждой из петель $R_{1,2}$ пропорционально ее длине, а значит радиусу $r_{1,2}$. Цепь представляет собой просто последовательно соединенные 1) кусок ближней петли, 2) дальнюю петлю, 3) оставшийся кусок ближней петли. Как именно разделяется на куски ближняя петля неважно. Нам нужно знать только разность потенциалов на концах дальней петли, потому что эти концы как раз соприкасаются друг с другом и если одно из мест касания будет как раз местом дефекта, там можно организовать пробой. Эта разность потенциалов равна

$$U_{12} = U\frac{R_2}{R_1 + R_2} = U\frac{r_2}{r_1 + r_2} = U\frac{2\pi r_2}{L},$$

и для того, чтобы произошел пробой, она должна быть не меньше W, так что получаем условие:

$$r_2 \geq \frac{L}{2\pi}\frac{W}{U}.$$

Если $W > U$, его выполнить невозможно, потому что полной длины петли не хватит на одно такое кольцо.

Задача 4. Бедное озеро

Юной Вильме нужно передать бабушке, живущей на противоположном берегу озера, немного энергии на следующие десять лет. Для этих целей между ними по дну озера проходит изолированная линия электропередач, в которой Вильма генерирует постоянный ток, а бабушка с другой стороны отбирает тепловую энергию с полезной нагрузки и запасает в аккумуляторах. На сколько градусов нагревается вода в озере после одной такой передачи? Известно, что средняя глубина озера 45.2 m, а одного фаербола, в котором содержится ровно в 10 раз меньше энергии, чем передается бабушке, хватает на понижение уровня воды в озере на 42 см и нагрев оставшейся части на 10 градусов. Отношение сопротивления проводов к сопротивлению полезной нагрузки равно 1/100. Теплоемкость воды $4.2 \cdot 10^3\ J/(kg \cdot C)$, удельная теплота парообразования $2.26 \cdot 10^6\ J/kg$.

Решение

Электрическая цепь представляет собой последовательно соединенные провода и сопротивление полезной нагрузки, поэтому через них течет один и тот же ток, и отношение количеств теплоты, которые в них выделяются, вследствие закона Джоуля-Ленца, равно

$$\frac{W_R}{W_U} = \frac{I^2 R_R}{I^2 R_U} = \frac{R_Q}{R_U} = x,$$

то есть отношению $x = 1/100$, которое дано в условии. Тепловая энергия W_R, выделившаяся в проводах, идет на нагрев озера на разность температур ΔT, которую нужно найти. Пусть масса воды в озере равна M, теплоемкость воды c. Тогда

$$xW_U = W_R = Mc\,\Delta T, \qquad \Rightarrow \quad \Delta T = x\frac{W_U}{Mc}.$$

Энергию W_U, которую получает бабушка, считаем из данного соотношения

$$W_U = XW_F$$

через энергию фаербола W_F, где $X = 10$ по условию. Энергия же фаербола равна

$$W_F = Mc\,\Delta t + \lambda m,$$

где λ это удельная теплота парообразования, а m масса испарившейся воды. Если средняя глубина озера H, а уровень понизился на h, то

$$\frac{m}{M} = \frac{h}{H},$$

так что

$$W_F = Mc\big[\Delta t + \frac{\lambda}{c}\frac{h}{H}\big], \qquad \Delta T = xX\frac{W_F}{Mc},$$

так что в итоге

$$\Delta T = xX\big[\Delta t + \frac{\lambda}{c}\frac{h}{H}\big].$$

В числах

$$\Delta T = 10^{-2} \cdot 10^1 \cdot \Big(10 + \frac{2.26\ 10^6}{4.2\ 10^3}\ \frac{42\ 10^{-2}}{45.2}\Big) = 10^{-1}\big[10 + 5\big] = 1.5\ [C].$$

Заметим, что мы здесь не учитываем нагрев испарившейся части воды до 100 градусов. Во-первых, мы не знаем начальную температуру, а во-вторых, несложно оценить что это слагаемое в уравнении теплового баланса заведомо намного меньше двух других.

Задача 5. Рыбка в космосе

После серии немного неудачных заклинаний, в том числе пары трансфигураций, Джил, будучи рыбкой, живет в космическом корабле, заполненном водой, в невесомости. Искусственная гравитация создается вращением корабля вокруг оси с некоторой постоянной угловой скоростью. У рыбки Джил, как и у всех рыбок, есть плавательный пузырь, с помощью которого она может изменять свою среднюю плотность. При плотности рыбки, равной 2/3 плотности воды, период колебаний рыбки вокруг оси вращения корабля равен $T_{2/3}$. Чему будет равен период колебаний $T_{1/2}$ при плотности, равной половине плотности воды? Джил знает, что 1) период колебаний пружинного маятника из тела массы m и пружины жёсткости k равен $2\pi\sqrt{m/k}$; 2) когда катаешься на карусели, чтобы оставаться неподвижной по отношению к платформе, нужно по направлению к оси вращения прикладывать силу, равную по величине $M\omega^2 R$, где M это масса катающейся, R расстояние до оси вращения, ω угловая скорость вращения. Можно считать, что сопротивлением воды можно пренебречь.

Решение

Из второй подсказки мы знаем, что если мы переходим с систему отсчета, движущуюся с кораблем, на рыбку действует неинерциальная сила, центробежная сила, равная

$$F_g = M\omega^2 R,$$

и так как она пропорциональна массе, то получается, что рыбка находится как бы в поле тяжести с эффективным ускорением свободного падения $g = \omega^2 R$. При этом центробежная сила, конечно, действует не только на рыбку, но и на воду, потому на рыбку действует сила Архимеда, равная весу вытесненной воды, то есть

$$F_A = \rho_0 g V = Mg\frac{\rho_0}{\rho} = \frac{Mg}{x},$$

где ρ_0 это плотность воды, ρ плотность рыбки, $x = \rho_0/\rho > 1$ их отношение. Плотность рыбки меньше плотности воды во всех интересующих нас случаях, поэтому сила Архимеда больше, и результирующая сила направлена *по направлению к оси вращения* и по величине равна

$$F = F_A - F_g = M\omega^2\big(x-1\big)\cdot R.$$

Это по форме такое же соотношение как для пружинного маятника: $F_k = kR$. Заменяя здесь k на эффективную“жесткость”

$$k_A = \omega^2 M(x-1),$$

из второй подсказки мы можем извлечь, что период колебаний равен

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{M}{k_A}} = 2\pi\sqrt{\frac{M}{M\omega^2(x-1)}} = \frac{2\pi}{\omega}\cdot\frac{1}{\sqrt{x-1}}.$$

Тогда

$$\frac{T_{1/2}}{T_{2/3}} = \frac{1/\sqrt{2-1}}{1/\sqrt{3/2-1}} = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Здесь мы полагаем, что рыбка много меньше чем амплитуда ее колебаний. Также учет сопротивления воды, а именно присоединенной массы, поменяет период колебаний на фактор порядка единицы, в зависимости от формы рыбки.